

[P1] Sean $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}^n$, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, dados, y el problema

$$(P) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x)$$

donde $\varphi(x) = \max\{c_1^T x + b_1, \dots, c_m^T x + b_m\}$.

- (i) [3 ptos] Demuestre que (P) es un problema convexo (es decir, función objetivo convexa y conjunto factible convexo).
- (ii) [3 ptos] Encuentre un problema de Programación Lineal que sea equivalente a (P) y explique en qué sentido son equivalentes.

[P2] Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice **cono** si y sólo si: $\forall x \in C, \forall \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x \in C$.
Definamos el cono tangente de un conjunto S en un punto $x_0 \in S$ como sigue:

$$T_S(x_0) = \{d \in \mathbb{R}^n \text{ tq } \exists d_k \rightarrow d, \exists t_k \rightarrow 0, t_k > 0, x_0 + t_k d_k \in S \quad \forall k\}$$

- (i) [1 pto] Muestre que $T_S(x_0)$ es no vacío.
- (ii) [2 ptos] Muestre que $T_S(x_0)$ es un cono.
- (iii) [2 ptos] Muestre que $T_S(x_0)$ es un conjunto cerrado.
- (iv) [1 pto] Si $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0 \vee y = 0\}$ y $x_0 = (0, 0)$, determine $T_S(x_0)$.

[P3] Considere el poliedro \mathcal{P} definido por:

$$x_1 - x_2 - 1 \geq 0, \quad x_1 - 2x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Determine todos los puntos y direcciones extremas de \mathcal{P} , usando los teoremas de caracterización.